Kenmerken van figuren en lichamen uit de klassieke meetkunde

Geometrische vormen

J. Oosterhoff

bouwen met staal

Colofon

tekst prof.ir. J. Oosterhoff
vormgeving KEPCOM Creatieve Communicatie

uitgave Bouwen met Staal
ISBN 978-90-72830-92-0

Boerhaavelaan 40, 2713 HX Zoetermeer
tel. (079) 353 12 77
info@bouwenmetstaal.nl
www.bouwenmetstaal.nl

Voorwoord

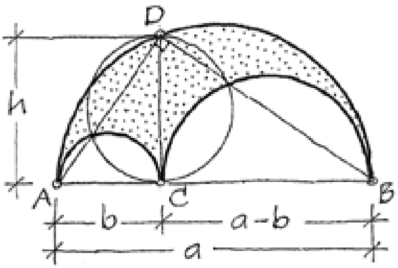
Het is opmerkelijk dat er al decennialang in de wiskunde een tendens bestaat meer en meer algebraïsch te werk te gaan en de wiskunde te behandelen in woorden, letters, cijfers en tekens met heel weinig afbeeldingen. Vroeger bestond in het onderwijs de beschrijvende (projectieve) meetkunde, maar dit vak is al lang verdwenen. Toch is het grafische aspect van de wiskunde van groot belang, waarbij ik denk aan onder meer ingenieurs, architecten, industrieel vormgevers en beeldende kunstenaars.
De verzameling meetkundige vormen in dit boek is hoofdzakelijk gebaseerd op de klassieke Euclidische meetkunde die begon bij de Grieken en later, na de middeleeuwen, werd voortgezet. Het is het waard deze vormen nog eens, gebundeld, in de herinnering terug te roepen. Daarbij is de vraag relevant welke betekenis de klassieke meetkunde tegenwoordig nog heeft: met de computer kan nu alles worden getekend. Maar het lijkt nuttig nog eens in herinnering te roepen wat de wiskundige oorsprong van veel vormen is en wat de bijbehorende benamingen zijn.
Bij de klassieke meetkunde is het begrip 'construeerbaarheid' voor veel vormen belangrijk: het tekenen van figuren en lichamen met passer en liniaal (zonder maatverdeling). Deze vaardigheid is al lang achterhaald (ander tekengereedschap, de computer) maar het blijft – wat het grafische aspect ervan betreft – een boeiend onderwerp.
Een ander interessant aspect is dat in de geraadpleegde wiskundeboeken meestal afbeeldingen (tekeningen) staan die veel meer informatie zouden kunnen geven dan het geval is. Zo worden in algebraïsche formules voor wiskundige figuren vaak maatgrootheden aangeduid met letters zoals a, b, c, m, n en r. Als eenvoudig voorbeeld de cirkel-ellips: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Hoe informatief en beeldend zou het zijn de maten a en b in een tekening weer te geven, maar vrijwel nergens is dat het geval. In dit boek is dergelijke informatie zoveel mogelijk in de tekeningen verwerkt.

De keuze van de lemma's is een subjectieve zaak. Daarbij speelde de voorkeur voor karakteristieke vormen een belangrijke rol, evenals de construeerbaarheid van de figuren en lichamen.

J. Oosterhoff mei 2013

- **achthoek** zie "veelhoek"
- **afstand** zie "loodlijn"
- **afwikkelingskromme** zie "kromming"
- **antiversiera** zie "parel"
- **arbelos**

Ook genoemd "schoenmakersmes" en "sikkel van Archimedes".
De arbelos ontstaat als in een halve cirkel met middellijn AB twee naast elkaar liggende halve cirkels worden geplaatst, waarvan de som van hun middellijnen gelijk is aan de middellijn van de grote halve cirkel. Richt men in het ontmoetingspunt van de beide kleine halve cirkels op AB een loodlijn op die de grote halve cirkel in het punt D treft (lengte h) dan kan een cirkel met middellijn h worden getekend. De oppervlakte van deze cirkel is gelijk aan die van de arbelos.



oppervlakte van de sikkel

$$A_{sikkel} = 1/2\left[\frac{\pi}{4}a^2 - \frac{\pi}{4}b^2 - \frac{\pi}{4}(a-b)^2\right] =$$
$$= 1/8 \cdot \pi\left[a^2 - b^2 - (a-b)^2\right] =$$
$$= 1/4 \cdot \pi\,(ab - b^2)$$

oppervlakte van de cirkel CD, diameter h

$$A_{cirkel} = 1/4 \cdot \pi \cdot h^2$$

in rechthoekige driehoek ABD is:

$h^2 = b(a-b)$ (zie "driehoek")

$$A_{cirkel} = 1/4 \cdot \pi\,[b(a-b)] =$$
$$= 1/4 \cdot \pi\,(ab - b^2)$$

$$A_{sikkel} = A_{cirkel}$$

astroïde

De astroïde of sterkromme, ook genoemd asteroïde, is een hypocycloïde (zie "cycloïde"). Hierbij rolt een kleine cirkel (c, straal r) langs de binnenzijde van een grote cirkel (C, straal R). Bij R : r = 4 ontstaat de astroïde.

Vergelijkingen $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases}$$

In de vier sterpunten raakt de astroïde aan de X-as respectievelijk de Y-as.

Oppervlakte van de astroïde

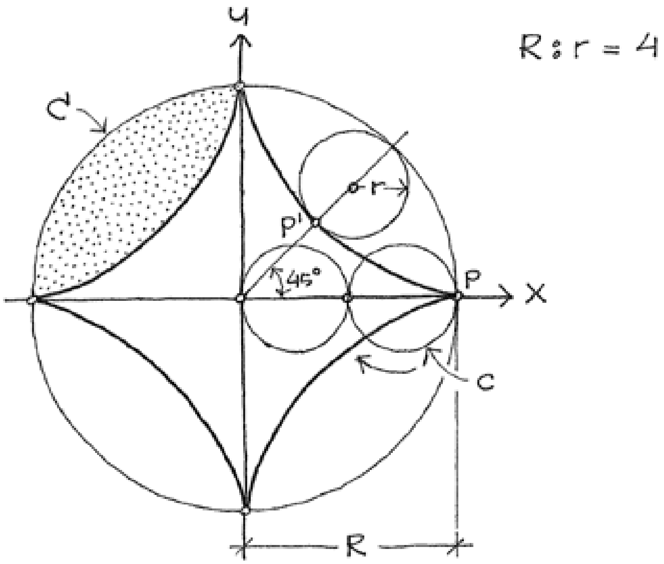
$A = 3/8 \cdot \pi \cdot R^2$

Oppervlakte van het vlak tussen een boogdeel en de omtrek van cirkel C

$A = 5/32 \cdot \pi \cdot R^2$

Lengte van een boogdeel

$L = 1{,}5 \cdot R$



Het parameterstelsel

De abscis en ordinaat van een punt van een figuur zijn hierbij functies van een variabele eenheid, de parameter. Deze wordt gewoonlijk aangeduid met t en kan betrekking hebben op een variabel getal of op een variabele hoekgrootte.

Als in het parameterstelsel een hoek wordt aangeduid met φ heeft dit dezelfde betekenis als in het poolstelsel, dus een hoek gemeten vanaf de positieve X-as met de erbij behorende voerstraal zoals in:

cirkel $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Voorbeelden van parametervergelijkingen

cardioïde $\begin{cases} x = r(2\cos t - \cos 2t - 1) \\ y = r(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$

folium van Descartes $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

parabool $\begin{cases} x = 1/2 \cdot p \cdot t^2 \\ y = p \cdot t \end{cases}$

cycloïde

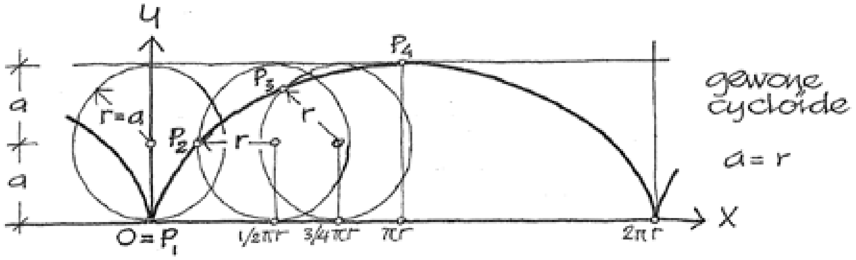
Voor de cycloïde zijn de uitgangspunten een assenstelsel X–Y met oorsprong O en een cirkel met straal r waarvan het onderste punt in O ligt.
De cycloïde ontstaat als de cirkel over de X-as rolt en wordt beschreven door een punt P dat op een afstand a van het cirkelmiddelpunt ligt.

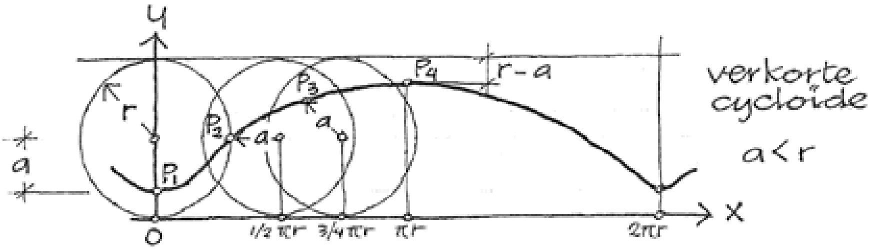
De algemene vergelijking van de cycloïde is:

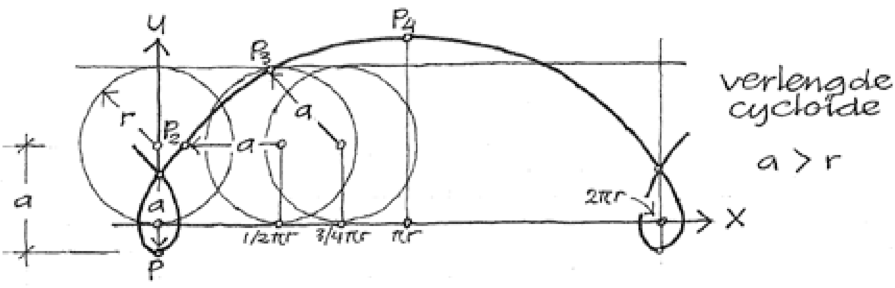
$$\begin{cases} x = r\varphi - a\sin\varphi \\ y = r - a\cos\varphi \end{cases}$$

Hierin is φ de hoek waarover de cirkel is gerold.

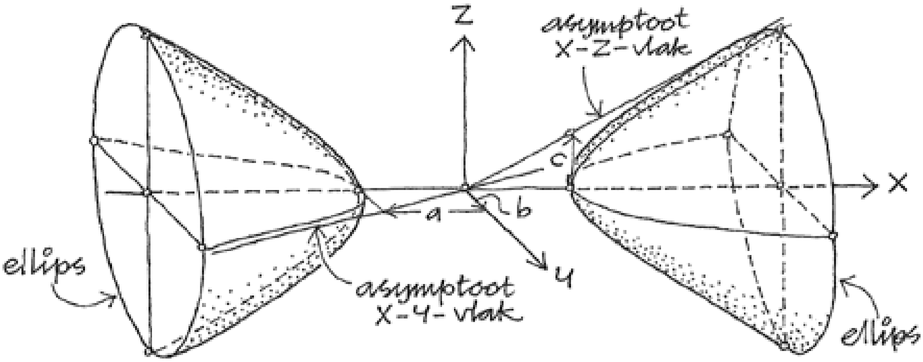
De vorm van de cycloïde hangt af van de verhouding van a tot r. Is a kleiner dan r dan ontstaat de verkorte cycloïde, is a groter dan r de verlengde cycloïde en voor a = r de gewone cycloïde.







Tweeschalige hyperboloïde



Deze ontstaat als een hyperbool zich om de X-as beweegt en bestaat uit twee tegenover elkaar liggende delen.

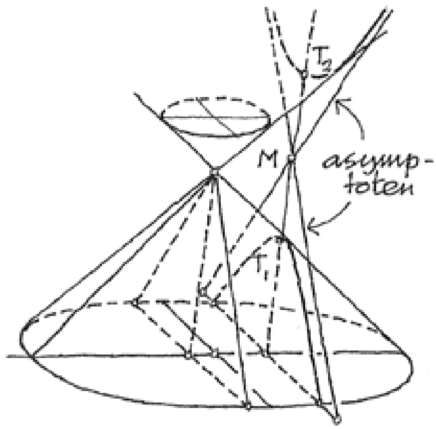
Vergelijking

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

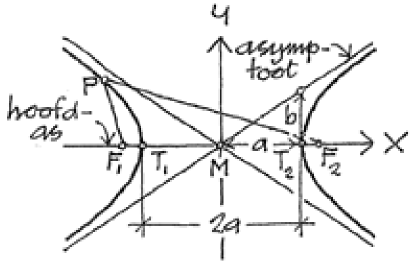
Voor a=b worden de ellipsen cirkels en ontstaat een tweeschalige omwentelingshyperboloïde.

hyperbool

De hyperbool is een kegelsnede*. Ze ontstaat wanneer een dubbele omwentelingskegel (cirkeldoorsnede) wordt gesneden door een plat vlak waarvan de helling groter is dan die van de beschrijvenden van de kegel.



Een hyperbool is de meetkundige plaats van de punten waarvan het verschil tussen de afstand van het punt tot twee vaste punten (de brandpunten F_1 en F_2) een constante is (2a).
Ze bestaat uit twee takken die symmetrisch zijn ten opzichte van de X- en de Y-as.



M	middelpunt
T_1 T_2	toppen
F_1 F_2	brandpunten
PF_1 PF_2	voerstralen

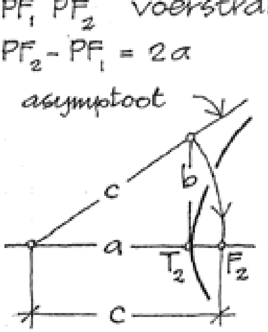
$PF_2 - PF_1 = 2a$

Vergelijkingen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

De beide takken naderen tot twee asymptoten

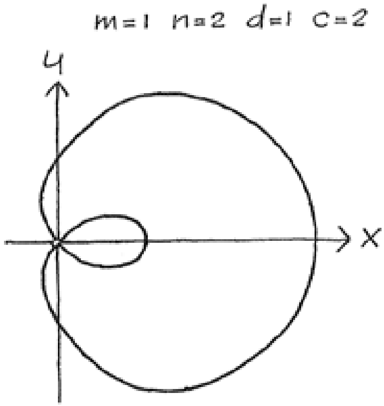
$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$$



De richting van de asymptoten en de plaats van de toppen bepalen de plaats van de brandpunten en dus de vorm van de hyperbool.

c = lineaire excentriciteit $= \sqrt{a^2 + b^2}$

ovaal



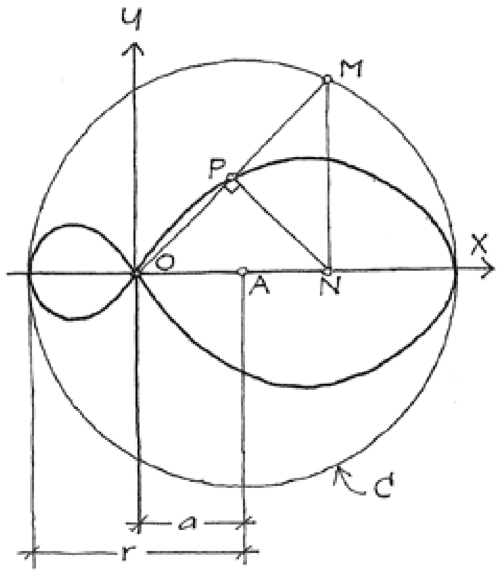
Ovaal van Descartes

De ovaal van Descartes vertoont gelijkenis met de slak van Pascal*.

Vergelijking

$$m\sqrt{x^2+y^2}+n\sqrt{(x-d)^2+y^2}=c$$

Er zijn verschillende vormen mogelijk. Karakteristiek is de vorm met de inwendige lus die lijkt op de verlengde vorm van de slak van Pascal.

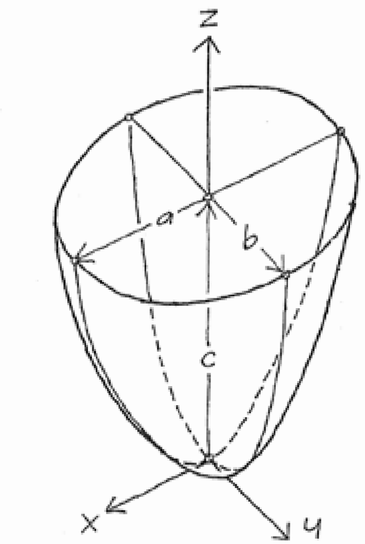


Ovaal van Münger

De ovaal van Münger kent een aantal vormen. Eén ervan kan worden geconstrueerd.

Gegeven zijn een cirkel C met middelpunt A en straal r, een lijn door A (de X-as) en een punt O op de X-as op een afstand a van A ($a<r$).
De verticaal in O is de y-as.
Trek een variabele lijn door O. Deze snijdt cirkel C in M.
Trek de loodlijn uit M op de X-as (voetpunt N).
Trek uit N de loodlijn op OM (voetpunt P).
P ligt op een ovaal van Münger van de zesde graad.

paraboloïde



Er zijn twee vormen van paraboloïden.

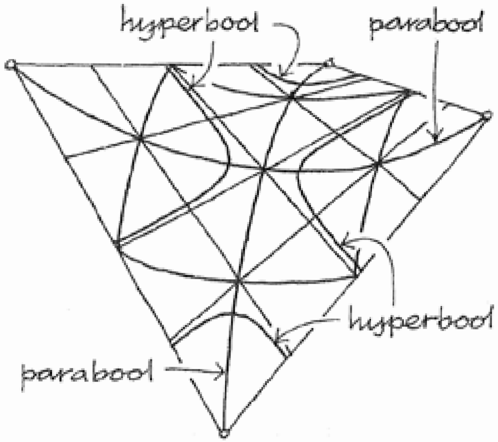
- elliptische paraboloïde
- hyperbolische paraboloïde

Elliptische paraboloïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

Voor $a = b$ ontstaat een omwentelingsparaboloïde die draait om de Z-as.

Inhoud $V = 1/2 \cdot \pi \cdot a^2 \cdot c$

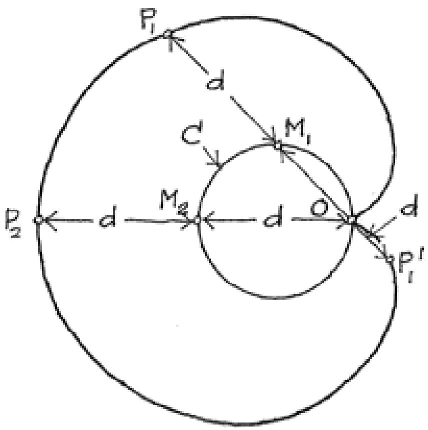


Hyperbolische paraboloïde

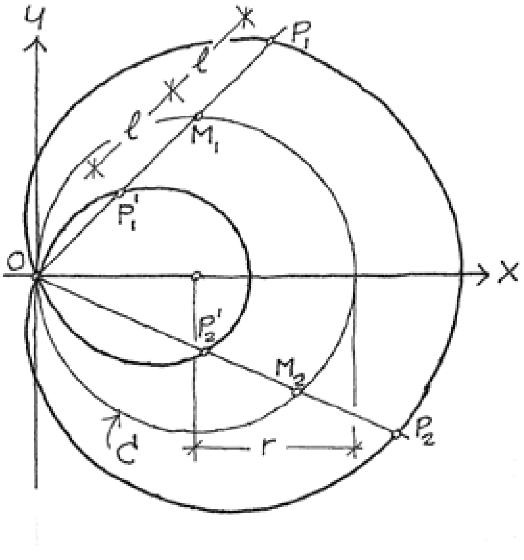
Deze paraboloïde heeft een zadelvorm.

Op het oppervlak liggen drie lijnenstelsels:

- Twee elkaar snijdende parabolenstelsels.
- Twee stelsels van hyperbooltakken.
- Twee stelsels van beschrijvenden (regelvlak).



De gewone vorm kan ook worden geconstrueerd als een conchoïde*. De uitgangskromme is een cirkel (C) met diameter d. Het punt van oorsprong O ligt op deze cirkel en de uit te zetten maat aan weerszijden van de snijpunten M met de cirkel C is gelijk aan de diameter d van de cirkel.



Ook de verlengde vorm kan op dezelfde wijze worden geconstrueerd. In plaats van de diameter d van de cirkel C (straal r) wordt een afwijkende lengtemaat ℓ uitgezet ($\ell < r$).

Vergelijkingen

$$(x^2+y^2-2rx)^2 = \ell^2(x^2+y^2)$$

$$\rho = 2r\cos\varphi \pm \ell$$

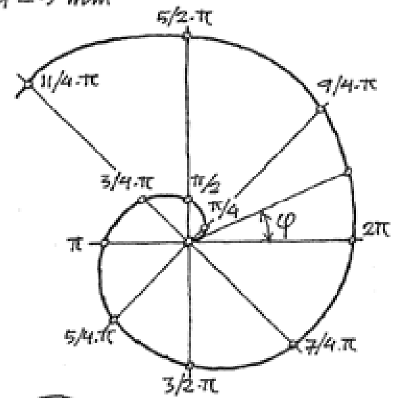
De slak (limaçon) werd omstreeks 1600 geconstrueerd door de Franse wiskundige Etienne Pascal (vader van de bekende Blaise Pascal).

■ sleepkromme zie "tractrix"

spiraal

Een spiraal is een kromme die in het platte vlak zich om een vast punt (de pool O) heenwindt terwijl de afstand tot dit punt (de voerstraal ρ) steeds groter wordt.
Daarnaast zijn er ook ruimtelijke spiralen, bijvoorbeeld de schroeflijn*.
Een spiraal wordt altijd weergegeven door een poolvergelijking : $\rho = f(\varphi)$ waarin φ de draaiingshoek is.
Deze vergelijking heeft vele variaties.
In het navolgende worden de bekendste spiralen behandeld.

$a = 5$ mm



Spiraal van Archimedes

Dit is de spiraal met de eenvoudigste vergelijking

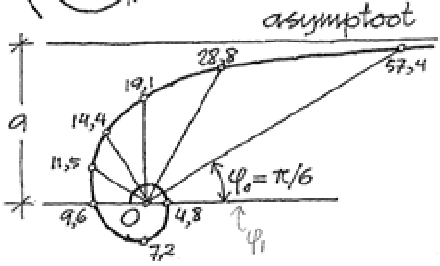
$$\rho = a \cdot \varphi$$

waarin a een constante is en φ in radialen wordt uitgedrukt.

Booglengte voor een draaiingshoek φ_1

$$L = 1/2 \cdot a\left(\varphi\sqrt{1+\varphi_1^2} + \operatorname{arcsinh}\varphi_1\right)$$

Archimedes van Syracuse (287 - 212 vC), Grieks natuurkundige en wiskundige.



$\varphi_0 = \pi/6 = 30°$
$a = 30$ mm

Hyperbolische spiraal

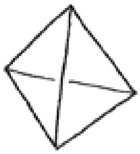
Vergelijking

$$\rho = \frac{a}{\varphi}$$

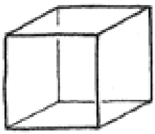
Deze spiraal heeft een asymptoot.

veelvlak

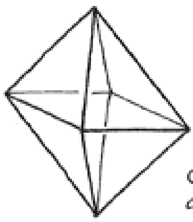
Platonische veelvlakken



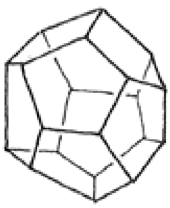
tetraëder
viervlak



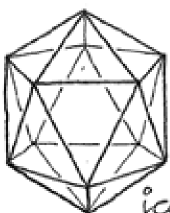
hexaëder
zesvlak



octaëder
achtvlak



dodecaëder
twaalfvlak



icosaëder
twintigvlak

Veelvlakken of polyëders zijn lichamen die alzijdig worden begrensd door veelhoeken (de zijvlakken). De snijlijnen van de zijvlakken heten ribben. Ze ontmoeten elkaar in de hoekpunten.

Tussen de aantallen zijvlakken, hoekpunten en ribben bestaat het verband (formule van Euler):

$$v + h = r + 2$$

v = aantal zijvlakken
h = aantal hoekpunten
r = aantal ribben

Een veelvlak heet regelmatig of regulair wanneer zijn zijvlakken regelmatige veelhoeken van hetzelfde type en dezelfde grootte zijn (congruent). Ze worden platonische veelvlakken genoemd (Plato, 427-347 vC, Grieks wijsgeer). Daarvan zijn er vijf typen: tetraëder, hexaëder, octaëder, dodecaëder, icosaëder.

veelvlak	m	n	v	h	r
tetraëder	3	3	4	4	6
hexaëder	3	4	6	8	12
octaëder	4	3	8	6	12
dodecaëder	3	5	12	20	30
icosaëder	5	3	20	12	30

m = aantal vlakken dat in een hoekpunt bij elkaar komt.
n = aantal zijden (en hoekpunten) van een zijvlak.

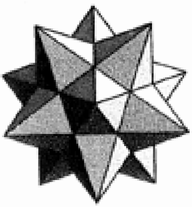
Zoals regelmatige veelhoeken een omgeschreven en een ingeschreven cirkel hebben, zijn er bij de platonische veelvlakken een <u>omgeschreven bol</u> (straal r_o) en een <u>ingeschreven bol</u> (straal r_i). De omgeschreven bol omvat alle hoekpunten van het veelvlak, de ingeschreven bol raakt ieder zijvlak in zijn middelpunt. De beide bollen hebben eenzelfde middelpunt.

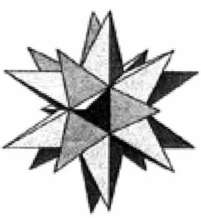
	tetra-eder	hexa-eder	octa-eder	dodecaëder	icosaëder
A zijvlak	$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$	a^2	$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$
A totaal	$a^2\sqrt{3}$	$6a^2$	$2a^2\sqrt{3}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$5a^2\sqrt{3}$
V inhoud	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$	a^3	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$	$\frac{a^3}{4}(15+7\sqrt{5})$	$\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$
straal r_o	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{4}\sqrt{3}(1+\sqrt{5})$	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
straal r_i	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$\frac{a}{4}\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{a}{12}\sqrt{3}(3+\sqrt{5})$
hoek α ribben	60°	90°	60°	108°	60°
hoek φ zijvlakken	70°31,7'	90°	109°28,2'	116°33,9'	138°11,5'

a = lengte ribbe

<u>Deltaëder</u>
Een deltaëder is een veelvlak, afgeleid van de icosaëder, waarvan alle zijvlakken driehoekig zijn. Er kan een oneindig aantal zijvlakken zijn omdat elk driehoekig zijvlak kan worden vervangen door een driehoekige piramide.

Verlengt men de ribben van een dodecaëder of icosaëder dan ontstaan de <u>dodecaëderster</u> en de <u>icosaëderster</u>. Deze lichamen heten Keplerse lichamen (naar Johannes Kepler, 1571–1630).


dodecaëder-ster


icosaëder-ster

Index